オイラー数が 0 でない多様体上の格子フェルミオン

秋田大理工[A]，慶應大自然セ[B]，理研 iTHEMS[C]
湯本純[A]，三角樹弘[A,B,C]

Lattice fermions on discretized manifolds with nonzero Euler characteristics

[A]*Akita U.*, [B]*RECNS Keio U.*, [C]*RIKEN iTHEMS*
J. Yumoto[A] and T. Misumi[A,B,C]

無限自由度の量子力学に対応する場の量子論は，相互作用を導入した場合には理論を解析するどころか数学的に定義することすらままならない．一方，格子場の理論はユークリッド時空を格子離散化し，物質場を格子点，群に値を持つゲージ場をリンクに定義することで，ゲージ対称性を明確に保ちつつ数学的に well-defined な場の量子論の定式化を提供している．もちろん，連続時空上の場の量子論を得るためには連続極限操作が必要になるが，モンテカルロ数値計算に基づく格子 QCD は高精度で現実の物理を再現しており，現時点で最も成功した非摂動的場の量子論定式化だと言える．

さて，標準理論に含まれるようなフェルミオン場を，離散的な並進対称性を残しつつ格子上に定義するには，トーラス上 (オイラー数 0) で周期境界条件を課したフェルミオン作用を考えることになる．この場合，ブロッホの定理に基づいて運動量空間でのディラック演算子を調べることが有効であり，運動量空間ブリルアンゾーン内のゼロ点の数が自由度数になる．ところがポアンカレ・ホップの定理によれば，コンパクトな微分可能多様体上に定義されたベクトル場のゼロ点の指数の和はオイラー数 χ に等しくなるはずであり，これは上記のディラック演算子のゼロ点の指数 (カイラルチャージに対応) の和がゼロになることを意味する．したがって，各次元ごとに少なくとも自由度が 2 つ現れ，素朴に 4 次元格子フェルミオン作用を用意すると 16 個もの自由度が出現してしまう．これは「ダブリング問題」と呼ばれ，これを定理として定式化したものは「ニールセン・二宮の no-go 定理」呼ばれる．この問題を回避する方法としては，カイラル対称性を破る (Wilson fermion)，局所性を破る (Domain-wall fermion)，カイラル対称性を変形する (Overlap fermion)，他の対称性を破り自由度対の数を減らす (Staggered fermion, Minimally-doubled fermion)，などがあり，実際の格子 QCD でもこれらが用いられている．

一方，トーラス以外の時空にフェルミオン作用を定義することでダブリング問題を回避する方法は，これまであまり追求されてこなかった．その最大の理由は，並進対称性が壊れてしまうことや曲がった時空を考える必要があるためである．しかし，トーラス以外の時空であっても無限体積極限を取ることで局所的には並進対称性が回復すると考えられ，$S^d(\chi=2)$ や $\mathbb{R}P^d(\chi=1)$ に対応する格子上のフェルミオンを調べることには意味がある．本研究では 2 次元格子フェルミオン ($d=2$) に着目し，2 次元ディスクの境界における格子点を同一視することで，オイラー数が 0 でない多様体上にフェルミオンを定義した．本講演では，図 1 のようにディスク境界を同一視することで S^2 上 ($\chi=2$) の格子フェルミオンを準備し．実空間自由ディラック演算子のゼロモード数 (自由度数) を調べる．2 次元トーラス上で 4 つの自由度が現れるが，S^2 上では 2 つの自由度のみが現れ得ることを示す．続いて，$U(1)_A$ 対称性，量子異常，多様体のトポロジーとの関係を考察する．また，$RP^2(\chi=1)$ の多様体上での定式化についても言及する．

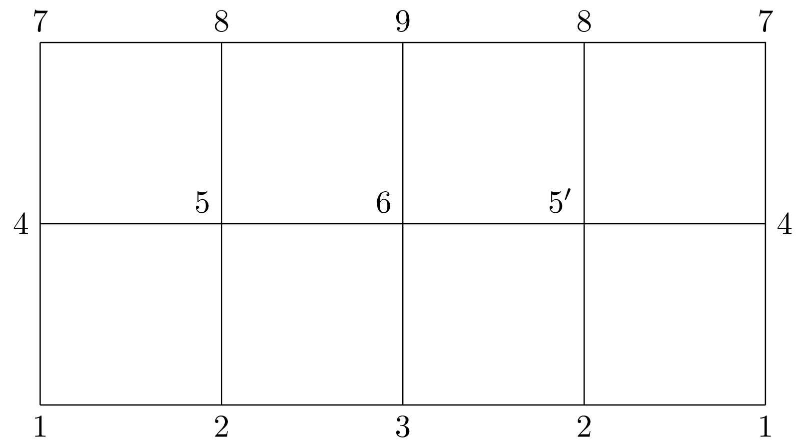

図 1　S^2 上に北極点と南極点が現れる境界を課した図